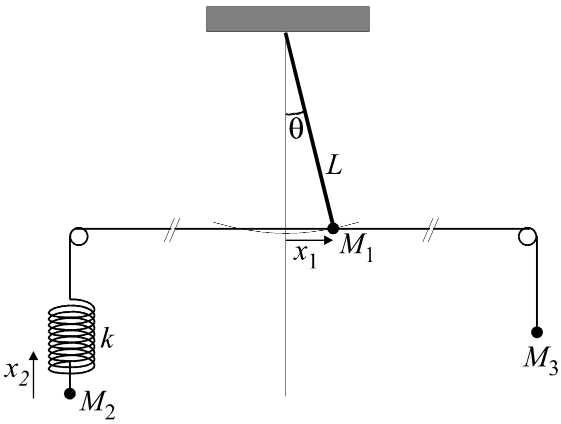
Tentamen Golven en Optica (19/11/98, 14.00-17.00, Examenhal)

Begin iedere opgave op een apart vel papier en zet daarop je naam. Vermeld op het eerste vel je naam, geboortedatum, studentnummer, studierichting, eerste jaar van inschrijving, adres met postcode, en het aantal ingeleverde bladen.

Puntenverdeling: 1=30[6+6+9+9], 2=30[7+5+7+5+6], 3=30[6+6+6+6+6]

Vraagstuk 1

Een massa M_1 hangt aan een slinger met lengte L. De uitwijking van de slinger wordt met x_1 of q aangegeven (zie figuur). Aan de massa M_1 zijn via twee lange koorden massa's M_2 (via een veer met veerconstante k) en M_3 bevestigd, beide via een katrol. De koorden zijn zo lang dat ze in benadering horizontaal blijven lopen onafhankelijk van de slingeruitwijking. Afgezien van M_1, M_2 en M_3 worden verdere massa's verwaarloosd, evenals de wrijving. Gegeven is dat L=2,5 m, en g=10 m/s^2.



a. Gegeven is dat M_2=M_3=0, M_1=3 kg. Leidt de exacte bewegingsvergelijking af voor de slingerbeweging van M_1 met q als coördinaat. Pas vervolgens de kleine-hoek-benadering toe (q <<1), en bereken uit de resulterende bewegingsvergelijking de frequentie van de slinger.

b. Gegeven is dat M_1=3 kg, M_2=4,5 kg, M_3=4,5 kg, en k=∞. Stel de bijbehorende bewegings-vergelijking op (voor q <<1), en bereken de slingerfrequentie.

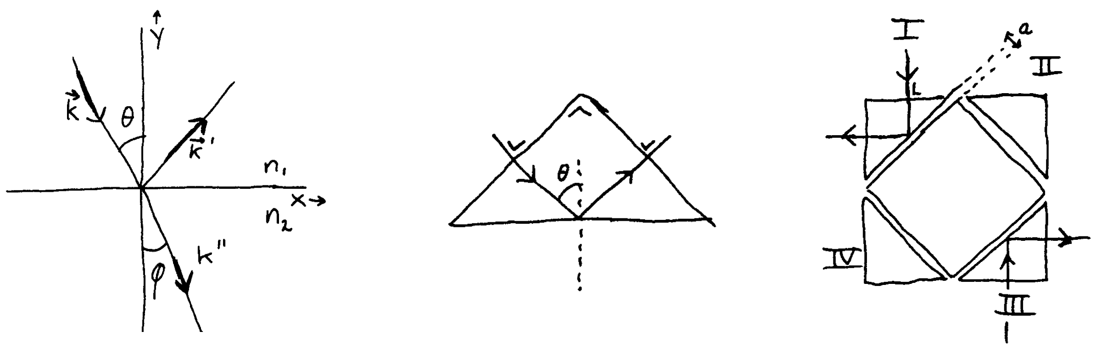
c. Gegeven is dat M_1=3 kg, M_2=2 kg, M_3=2 kg, en k=4 N/m. Toon aan dat de bewegings-vergelijkingen de volgende vorm hebben:

$$\ddot{x}_1 + (a+b)x_1 - bx_2 = 0$$
$$\ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 = 0\,,$$

en bereken a, b en c.

d. Bereken de eigenfrequenties van het systeem van onderdeel **c**.

Vraagstuk 2



a. De linker figuur laat de stralengang zien van een lichtbundel die met golfvector $\vec{k}$ op een grensvlak van twee media invalt, onder een hoek q met de normaal. In het algemeen zal een deel van de golf, met golfvector $\vec{k}'$, in het medium met brekingsindex n_1 teruggekaatst worden, het overige wordt doorgelaten in het andere medium (met brekingsindex n_2), met golfvector $\vec{k}''$ en onder een hoek j. Aan het grensvlak geldt de randvoorwaarde dat de transversale componenten van het elektromagnetische veld continu moeten zijn. Voor TM-gepolariseerd licht vertaalt zich dat in de voorwaarde $\vec{H} - \vec{H}' = \vec{H}''$. Verder is gegeven dat uit de wetten van Maxwell volgt dat $\vec{H} \sim k\vec{E}$. Definieer $n = n_2 / n_1$, en laat zien dat geldt:

$$r_p = \left(\frac{E'}{E}\right)_{\mathrm{TM}} = \frac{\cos j - n\cos q}{\cos j + n\cos q}$$

Bereken de invalshoek q waarbij er geen TM-gepolariseerd licht wordt gereflecteerd.

b. Voor een bepaald experiment willen we een lichtstraal onder een hoek van 45° op het grensvlak van een optisch dicht materiaal naar lucht (n = 1) laten invallen. Het is de bedoeling dat de lichtstraal volledig weerkaatst wordt, zie middelste figuur. Laat zien wat de beste keuze voor het optisch dichte materiaal is, magnesiumfluoride (n = 1.35) of glas (n = 1.50).

c. Ondanks het feit dat we volledige reflectie hebben, dringt het veld toch enigszins door in de lucht. Laat zien dat in het geval van totale reflectie de elektrische vector van de uittredende golf geschreven kan worden als

$$\vec{E} = \vec{E}''\exp(i\vec{k}''\cdot\vec{r} - w\,t) = \vec{E}''\exp(-a\,|y|)\exp(i(k_1 x - w\,t))$$

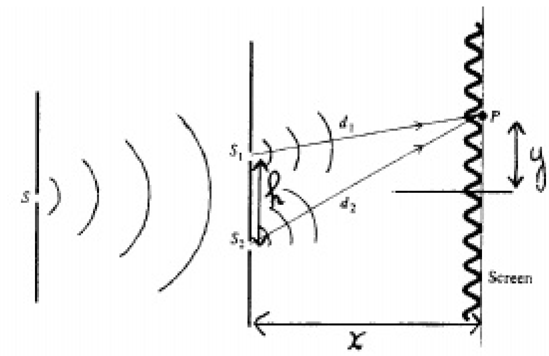
$$\text{met } a = \mathrm{k}''\sqrt{\frac{\sin^2 q}{n^2} - 1} \quad \text{en } k_1 = \frac{k''x\sin q}{n}$$

d. Neem de rechter figuur over. De weerkaatste gedeelten van de invallende stralen I en III zijn al getekend, laat zien hoe de doorgelaten stralen verder gaan. Leg uit dat deze opstelling gebruikt kan worden als een *optische mixer*.

e. Hoe groot moet de afstand a zijn om 1% van de amplitude van signaal I het centrale blok in te koppelen?

Vraagstuk 3

In een interferentie-experiment worden twee puntvormige aperturen S_1 en S_2 met onderlinge afstand h coherent belicht. De belichting is monochromatisch met golflengte l. Het resulterende interferentiepatroon wordt bestudeerd op een scherm dat geplaatst is op een afstand x van S_1 en S_2 (zie figuur). In de scalaire benadering wordt het electrische veld U_{tot} op het scherm beschreven door:



$$U_{\mathrm{tot}} = \frac{U_1}{d_1}e^{i(k\,d_1 - w\,t)} + \frac{U_2}{d_2}e^{i(k\,d_2 - w\,t)},$$

met U_1 en U_2 de respectievelijke amplitudes van het uit S_1 en S_2 uittredende licht (U_1 en U_2 kunnen verschillend zijn, bijvoorbeeld doordat de gebruikte aperturen niet precies even groot zijn). Verder zijn d_1 en d_2 de respectievelijke afstanden van S_1 en S_2 tot een punt P met verticale coordinaat y op het scherm.

a. Gegeven is dat de verticale afstanden h en y zeer klein zijn ten opzichte van de horizontale afstand x. Leg uit waarom dan in de bovenstaande formule de benadering $d_1 = d_2 = x$ *wel* goed is in de voorfactoren U_1/d_1 en U_2/d_2, maar *niet* in de argumenten van de complexe e-machten.

b. Laat zien dat, in de benadering van onderdeel **a**, de irradiantie I van het interferentiepatroon op het scherm gegeven wordt door:

$$I = \frac{1}{x^2}\left[U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos(k(d_2 - d_1))\right].$$

c. Laat zien dat, nog altijd voor $h << x$ en $y << x$, bij benadering geldt: $d_2 - d_1 = \dfrac{yh}{x}$.

d. Beschrijf voor deze benadering in woorden de structuur van het interferentiepatroon in de verticale (y) richting, in het vlak van de tekening.

e. De zichtbaarheid V van het interferentiepatroon is gedefinieerd als $V = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$, waarin I_{max} de irradiantie van de maxima van het interferentiepatroon is en I_{min} de irradiantie van de tussenliggende minima. Bereken V als $U_1=U_2$, en ook als $U_1=7U_2$.